

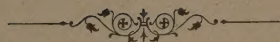
OM MAXIMALSPÄNNINGEN HOS CYLINDRISKA KROPPAR VID LONGITUDINELLA STÖTAR.

AKADEMISK AFHANDLING,
SOM MED VEDERBÖRLIGT TILLSTÅND
FÖR ERHÅLLANDE AF FILOSOFISK DOKTORSGRAD VID LUNDS UNIVERSITET
TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES Å LÄROSALEN N:O VI
ONSDAGEN DEN 23 MAJ 1900 KL. 10 F. M.

AF

HUGO GRAUERS

FIL. LIC. INGENJÖR, GB.



LUND 1900,

BERLINGSKA BOKTRYCKERI- OCH STILGJUTERI-AKTIEBOLAGET.

OM MAXIMALSPÄNNINGEN HOS CYLINDRISKA KROPPAR VID LONGITUDINELLA STÖTAR.

AKADEMISK AFHANDLING,

SOM MED VEDERBÖRLIGT TILLSTÅND
FÖR ERHÅLLANDE AF FILOSOFISK DOKTORSGRAD VID LUNDS UNIVERSITET
TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES Å LÄROSALEN N:O VI
ONSDAGEN DEN 23 MAJ 1900 KL. 10 F. M.

AF

HUGO GRAUERS

PIL. LIC. INGENIÖR, GB.



LUND 1900,

BERLINGSKA BOKTRYCKERI- OCH STILGJUTERI-AKTIEBOLAGET.

Man tänke sig två fasta isotropa kroppar i form af räta cylindrar. Den ena cylinderns ena ända hålles fast. Den andra cylindern rör sig i bådas gemensamma axelriktning och träffar den förra så, att ändytornas tyngdpunkter råka hvarandra, på det intet böjande moment må uppstå. Denna afhandling afser att taga reda på de största spänningar, som kunna förekomma hos de båda stafvarne. Den metod, som dervid användes för att åskådliggöra stafvarnes kompressioner vid olika tider, härrör från de Saint-Venant, som i Liouvilles journal deuxième série tome XII (1867) redogjort för rörelsen hos två fria elastiska cylindrar vid en longitudinel stöt.

Kap. 1.

Beteckningar och grundformler.

Betrakta de båda stafvarne såsom bildande två delar af en och samma staf, och beteckna alla de quantiteter, som hänföra sig till den fria stafven, med index 1, och alla dem, som hänföra sig till den andra, med index 2!

t betecknar tiden och räknas från det ögonblick, då stafvarne träffas.

V „ den fria stafvens hastighet vid tiden $t = 0$.

g „ „ „ acceleration „ „ $t = 0$.

x betyder ett tvärsnitts afstånd från den fria stafvens fria ända i det naturliga läget och längden af en staf, tvärsnittet, massan per längdenhet, totala massan, elasticitetsmodulen för töjning och den longitudinella förskjutningen för ett tvärsnitt x vid tiden t betecknas med

$$\{a_1, \omega_1, m_1, M_1 = m_1 a_1, E_1, u_1\} \text{ resp. } \{a_2, \omega_2, m_2, M_2 = m_2 a_2, E_2, u_2\}$$

Sätt:
$$v_1 = \frac{du_1}{dt}; j_1 = -\frac{du_1}{dx}; k_1^2 = \frac{E_1\omega_1}{m_1}; \tau_1 = \frac{a_1}{k_1};$$

$$v_2 = \frac{du_2}{dt}; j_2 = -\frac{du_2}{dx}; k_2^2 = \frac{E_2\omega_2}{m_2}; \tau_2 = \frac{a_2}{k_2}.$$

Här betyder: v snittets x hastighet vid tiden t ,
 j „ „ kompression „ „ t ,
 k rörelsens fortplantningshastighet och
 τ den tid, på hvilken rörelsen fortplantar sig genom en staf.

För förkortnings skull sätt vidare $\frac{E_2\omega_2}{k_1} = \frac{m_2k_2}{m_1k_1} = r =$ förhållandet mellan

de massor af stafvarne, genom hvilka rörelsen fortplantar sig på samma tid. Om rörelsen antages vara likadan för alla punkter i samma tvärsnitt, äro rörelseeqvationerna: $\frac{d^2u_1}{dt^2} = k_1^2 \frac{d^2u_1}{dx^2} + g$; $\frac{d^2u_2}{dt^2} = k_2^2 \frac{d^2u_2}{dx^2}$; och gränsvilkoren:

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=0} = 0; (u_2)_{x=a_1+a_2} = 0; (u_1)_{x=a_1} = (u_2)_{x=a_1};$$

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1} = \frac{E_2\omega_2}{E_1\omega_1} \left(\frac{du_2}{dx}\right)_{x=a_1} = r \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{du_2}{dx}\right)_{x=a_1};$$

$$(u_1)_{t=0} = 0; \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0} = V; (u_2)_{t=0} = 0; \left(\frac{du_2}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

Dessa beteckningar hafva användts af ofvannämnde författare, och uttrycket $\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1}$ betyder värdet af $\frac{du_1}{dx}$ för $x=a_1$; likaså betyder $(u_2)_{t=0}$ värdet på u_2 för $t=0$ etc. En annan beteckning, som ofta användes i det följande, är $f\left(x=\frac{b}{a}\right)$ eller $f\left(\frac{b}{a}\right)$ hvarmed samme författare betecknar värdet af en funktion f , då variabeln varierar mellan a och b .

Af ekvationerna här ofvan får man:

$$(1) \quad u_1 = f_1(x+k_1t) + F_1(x-k_1t) - \frac{g\tau_1^2}{2k_1^2}; \quad u_2 = f_2(x+k_2t) + F_2(x-k_2t);$$

För $0 < t < \infty$ gälla:

$$(2) \quad f'_1(k_1t) + F'_1(-k_1t) = 0;$$

$$(3) \quad f_2(a_1+a_2+k_2t) + F_2(a_1+a_2-k_2t) = 0;$$

$$(4) \quad f_1(a_1 + k_1 t) + F_1(a_1 - k_1 t) - \frac{ga_1^2}{2k_1^2} = f_2(a_1 + k_2 t) + F_2(a_1 - k_2 t);$$

$$(5) \quad f'_1(a_1 + k_1 t) + F'_1(a_1 - k_1 t) - \frac{ga_1}{k_1^2} = r \frac{k_2}{k_1} [f'_2(a_1 + k_2 t) + F'_2(a_1 - k_2 t)];$$

För $0 < x < a_1$ är:

$$(6) \quad f_1(x) + F_1(x) - \frac{gx^2}{2k_1^2} = 0; \text{ och } f'_1(x) - F'_1(x) = \frac{V}{k_1};$$

För $a_1 < x < a_1 + a_2$ är:

$$(7) \quad f_2(x) + F_2(x) = 0; \text{ och } f'_2(x) - F'_2(x) = 0;$$

f_1, f_2 etc. i (1) äro godtyckliga funktioner, som skola bestämmas ur vilkors-
equationerna; f'_1 etc. deras första derivator.

Af eqv. (6) och (7) får man:

$$\left. \begin{aligned} f'_1(x=0) &= \frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}; \\ F'_1(x=a_1) &= \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}; \end{aligned} \right\} \text{ och } \left. \begin{aligned} f'_2(x=a_1+a_2) &= 0; \\ F'_2(x=a_1+a_2) &= 0; \end{aligned} \right\}$$

Af (2) och (3) får man, om man inför x såsom variabel:

$$f'_1(x=0) = -F'_1(-x); \text{ och } f'_2(x=a_1+a_2) = F'_2(2a_1+2a_2-x);$$

$$\text{Häraf: } F'_1(x=-a_1) = \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}; \text{ och } f'_2(x=a_1+2a_2) = 0;$$

$$\text{Man har alltså: } \left. \begin{aligned} f'_1\left(\frac{a_1}{0}\right) &= \frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}; \\ F'_1\left(\frac{-a_1}{a_1}\right) &= \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}; \\ f'_2\left(\frac{a_1+2a_2}{a_1}\right) &= 0; \\ F'_2\left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right) &= 0; \end{aligned} \right\} A$$

Om man deriverar (4) och mellan (4) och (5) eliminerar F'_2 och f'_1 , får man:

$$\left. \begin{aligned} f'_1(a_1 + k_1 t) &= \frac{ga_1}{k_1^2(r+1)} + \frac{r-1}{r+1} \cdot F'_1(a_1 - k_1 t) + \frac{2rk_2}{k_1(r+1)} \cdot f'_2(a_1 + k_2 t); \\ F'_2(a_1 - k_2 t) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2(r+1)} + \frac{2k_1}{k_2(r+1)} \cdot F'_1(a_1 - k_1 t) - \frac{r-1}{r+1} \cdot f'_2(a_1 + k_2 t); \end{aligned} \right\}$$

Tillsamman med (2) och (3) kunna dessa formler skrivas:

$$\left. \begin{aligned}
 f'_1\left(x = \frac{\infty}{a_1}\right) &= -F'_1\left(-x = -\frac{\infty}{a_1}\right) = \frac{ga_1}{k_1^2(r+1)} + \frac{r-1}{r+1} \cdot F'_1(2a_1 - x) + \\
 &\quad + \frac{2rk_2}{k_1(r+1)} \cdot f'_2\left[a_1 + \frac{k_2}{k_1}(x - a_1)\right]; \\
 F'_2\left(x = \frac{\infty}{a_1}\right) &= f'_2(2a_1 + 2a_2 - x = \frac{\infty}{a_1 + 2a_2}) = \frac{ga_1}{k_1k_2(r+1)} + \frac{2k_1}{k_2(r+1)} \cdot \\
 &\quad \cdot F'_1\left[a_1 - \frac{k_1}{k_2}(a_1 - x)\right] - \frac{r-1}{r+1} \cdot f'_2(2a_1 - x);
 \end{aligned} \right\} \text{ B}$$

Ur formlerna A och B kan man successivt beräkna alla värden på f'_1 , F'_1 etc.

För att representera de olika värdena på f'_1 etc. eller j tager man t till abscissa och x till ordinata i ett rätvinkligt axelsystem och tänker sig, att stafvarne flyttas med gemensam konstant hastighet i t -axelns riktning. Formlerna för f'_1 etc. äro synbarligen diskontinuerliga, men bibehålla samma form i vissa fält. Dessas gränser bestämmas af räta linier, som man kan tänka sig beskrifna af två punkter, som utgå från $x = a_1$ och $t = 0$ och röra sig med hastigheten k_1 i den fria stafven och k_2 i den andra, reflekteras vid $x = 0$ och vid $x = a_1 + a_2$ samt dels reflekteras, dels bryta sig igenom vid $x = a_1$, allt under det stafvarne förflyttas i t -axelns riktning.

För att få begrepp om stafvarnes inverkan på hvarandra vilja vi börja med det enklaste fallet, det då $r = 1$.

Kap. 2.

$$r = 1.$$

Formlerna B blifva då:

$$\left. \begin{aligned}
 f'_1\left(x = \frac{\infty}{a_1}\right) &= -F'_1(-x) = \frac{ga_1}{2k_1^2} + \frac{k_2}{k_1} f'_2\left[a_1 + \frac{k_2}{k_1}(x - a_1)\right]; \\
 F'_2\left(x = \frac{\infty}{a_1}\right) &= f'_2(2a_1 + 2a_2 - x) = -\frac{ga_1}{2k_1k_2} + \frac{k_1}{k_2} \cdot F'_1\left[a_1 - \frac{k_1}{k_2}(a_1 - x)\right];
 \end{aligned} \right\} \text{ B}'$$

Dessa kunna äfven skrivas:

$$\left. \begin{aligned} f'_1 \left(x = a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \right) &= -F'_1(-x) = F'_1 \left(2a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 - x \right); \\ F'_2 \left(x = a_1 - \frac{2a_1}{k_1} k_2 \right) &= f'_2(2a_1 + 2a_2 - x) = -\frac{ga_1}{k_1 k_2} - f'_2 \left(2a_1 - \frac{2a_1}{k_1} k_2 - x \right); \end{aligned} \right\}$$

Af dessa och formlerna A i föregående kap. får man följande värden på f'_1 etc.

$$\begin{aligned} f'_1(a_1) &= \frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}; & f'_1 \left(a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \right) &= \frac{ga_1}{2k_1^2}; \\ F'_1(-a_1) &= \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}; & F'_1 \left(-a_1 - \frac{2a_2}{k_2} k_1 \right) &= -\frac{ga_1}{2k_1^2}; \\ f'_2(a_1 + 2a_2) &= 0; & f'_2 \left(a_1 + 2a_2 + \frac{2a_1}{k_1} k_2 \right) &= \frac{g(a_1 + 2a_2 - x)}{2k_2^2} - \frac{V}{2k_2}; \\ F'_1(a_1 + a_2) &= 0; & F'_2 \left(a_1 - \frac{2a_1}{k_1} k_2 \right) &= -\frac{g(a_1 - x)}{2k_2^2} - \frac{V}{2k_2}; \end{aligned}$$

$$f'_1 \left(\begin{pmatrix} 3a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \\ a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \end{pmatrix} \right) = \frac{g(2a_1 - x)}{2k_1^2} + \frac{ga_2}{k_1 k_2} - \frac{V}{2k_1};$$

$$F'_1 \left(\begin{pmatrix} -3a_1 - \frac{2a_2}{k_2} k_1 \\ -a_1 - \frac{2a_2}{k_2} k_1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{g(2a_1 + x)}{2k_1^2} - \frac{ga_2}{k_1 k_2} + \frac{V}{2k_1};$$

$$f'_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 + 4a_2 + \frac{2a_1}{k_1} k_2 \\ a_1 + 2a_2 + \frac{2a_1}{k_1} k_2 \end{pmatrix} \right) = -\frac{ga_1}{k_1 k_2};$$

$$F'_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 - \frac{2a_1}{k_1} k_2 \\ a_1 - \frac{2a_1}{k_1} k_2 \end{pmatrix} \right) = -\frac{ga_1}{k_1 k_2};$$

$$f'_1 \left(\begin{pmatrix} 3a_1 + \frac{4a_2}{k_2} k_1 \\ 3a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{ga_1}{2k_1^2};$$

$$F'_1 \begin{pmatrix} -3a_1 - \frac{4a_2 k_1}{k_2} \\ -3a_1 - \frac{2a_2 k_1}{k_2} \end{pmatrix} = \frac{ga_1}{2k_1^2};$$

$$f'_2 \begin{pmatrix} a_1 + 4a_2 + \frac{4a_1 k_2}{k_1} \\ a_1 + 4a_2 + \frac{2a_1 k_2}{k_1} \end{pmatrix} = -\frac{2ga_1}{k_1 k_2} - \frac{g(a_1 + 4a_2 - x)}{2k_2^2} + \frac{V}{2k_2};$$

$$F'_2 \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 - \frac{4a_1 k_2}{k_1} \\ a_1 - 2a_2 - \frac{2a_1 k_2}{k_1} \end{pmatrix} = -\frac{2ga_1}{k_1 k_2} - \frac{g(x + 2a_2 - a_1)}{2k_2^2} + \frac{V}{2k_2};$$

$$f'_1 \begin{pmatrix} 5a_1 + \frac{4a_2 k_1}{k_2} \\ 3a_1 + \frac{4a_2 k_1}{k_2} \end{pmatrix} = -\frac{g(4a_1 - x)}{2k_1^2} - \frac{2ga_2}{k_1 k_2} + \frac{V}{2k_1};$$

$$F'_1 \begin{pmatrix} -5a_1 - \frac{4a_2 k_1}{k_2} \\ -3a_1 - \frac{4a_2 k_1}{k_2} \end{pmatrix} = \frac{g(4a_1 + x)}{2k_1^2} + \frac{2ga_2}{k_1 k_2} - \frac{V}{2k_1};$$

$$f'_2 \begin{pmatrix} a_1 + 6a_2 + \frac{4a_1 k_2}{k_1} \\ a_1 + 4a_2 + \frac{4a_1 k_2}{k_1} \end{pmatrix} = 0;$$

$$F'_2 \begin{pmatrix} a_1 - 4a_2 - \frac{4a_1 k_2}{k_1} \\ a_1 - 2a_2 - \frac{4a_1 k_2}{k_1} \end{pmatrix} = 0;$$

Ur dessa värden på f'_1 etc. får man: $j_1 = -f'_1(x + k_1 t) - F'_1(x - k_1 t) + \frac{gx}{k_1^2}$;

$$j_2 = -f'_2(x + k_2 t) - F'_2(x - k_2 t);$$

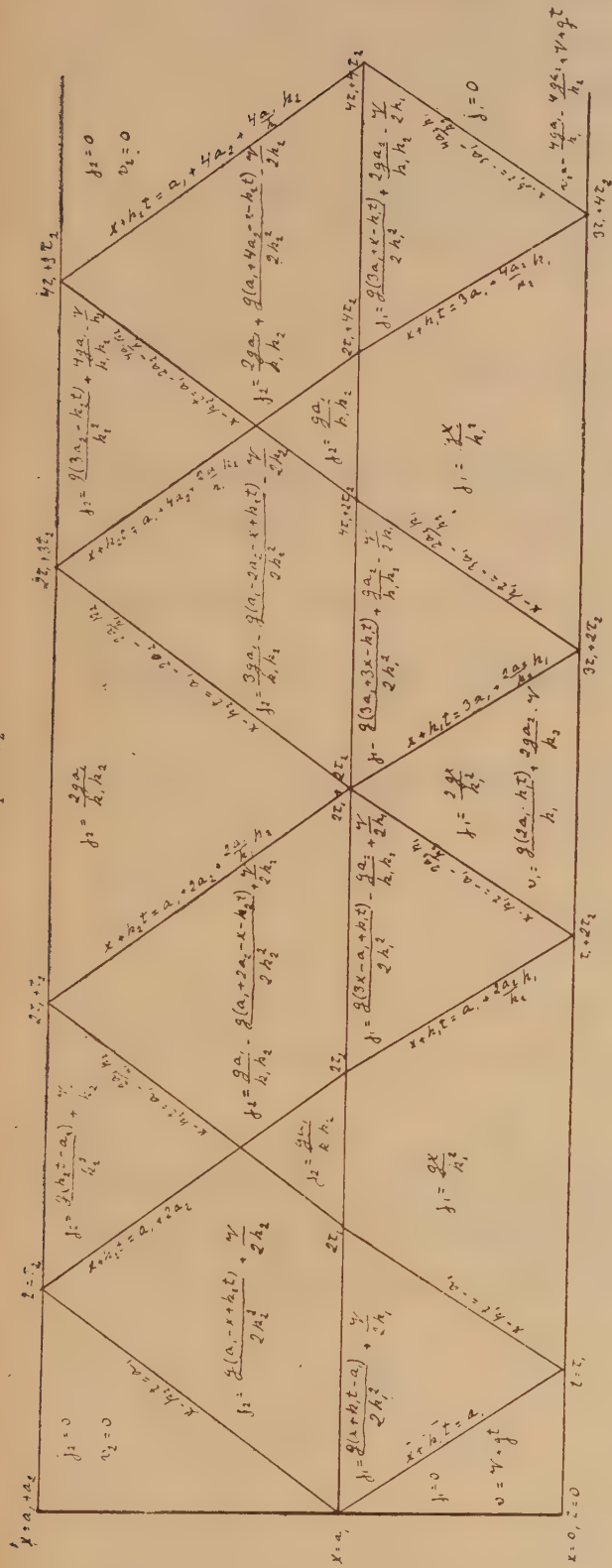
$$v_1 = k_1 f'_1(x + k_1 t) - k_1 F'_1(x - k_1 t);$$

$$v_2 = k_2 f'_2(x + k_2 t) - k_2 F'_2(x - k_2 t);$$

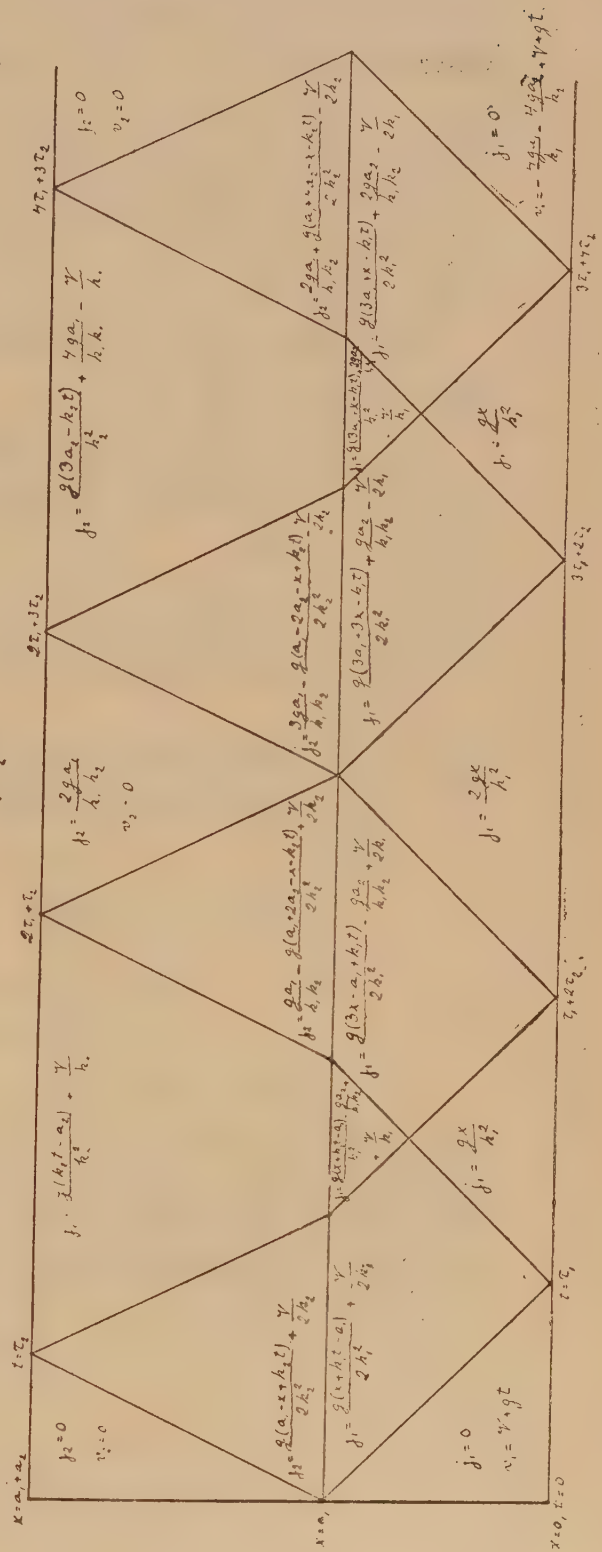
Diagrammen blifva något olika, allt efter som τ_1 är större eller mindre än τ_2 . De hafva det utseende, som visas å sidan 7.

Af dessa diagram framgår följande: Vid tiden $4\tau_1 + 4\tau_2$ hafva j_1 , v_1 , j_2 och v_2 samma värden som vid tiden $t = 0$. Om stafvarne vore fast förbundna

$v_1 < v_2$



$v_1 > v_2$



med hvarandra, skulle rörelsen vara periodisk och perioden vara $= 4\tau_1 + 4\tau_2$. Nu blir, om $V > 0$, j negativt för $x = a_1$ mellan tiden $2\tau_1 + 2\tau_2$ och $4\tau_1 + 4\tau_2$ och stafvarne skiljas då åt. Största spänningen hos stafven 1 är, om $\tau_1 < \tau_2$, i

punkten $x = a_1$ vid tiden $2\tau_1 + 2\tau_2$ och $(j_1)_{\max.} = \frac{2ga_1}{k_1^2} + \frac{V}{2k_1}$;

Om $\tau_1 > \tau_2$ och $V < 2g\tau_2$, är $(j_1)_{\max.}$ densamma, men om $\tau_1 > \tau_2$ och $V > 2g\tau_2$, är maximalspänningen i punkten $x = a_1$ vid tiden $2\tau_1$, och $(j_1)_{\max.} = \frac{2ga_1}{k_1^2} - \frac{ga_2}{k_1k_2} + \frac{V}{k_1}$;

För stafven 2 är i båda fallen $(j_2)_{\max.}$ i punkten $x = a_1 + a_2$ vid tiden $2\tau_1 + \tau_2$ och är $= \frac{2ga_1}{k_1k_2} + \frac{V}{k_2}$;

Dessa uttryck för j kunna skrivas i annan form, som omedelbart visar deras storlek i förhållande till kompressionerna vid hvilande belastning. Sätt $V = cg\tau_1$ och kalla:

ε_{11} = den största specifika töjning eller kompression, som stafven 1 skulle lida af sin egen tyngd i hvila.

ε_{12} = den specifika kompression, som stafven 1 skulle åstadkomma hos stafven 2 i hvila.

ε_{21} = den spec. kompression, som stafven 2 skulle åstadkomma hos stafven 1 i hvila, om stafven 2 påverkades af en kraft per massenhet $= g$.

Då äro:

$$1) \text{ Om } \tau_1 < \tau_2, (j_1)_{\max.} = \varepsilon_{11}\left(2 + \frac{c}{2}\right);$$

$$2) \quad \tau_1 > \tau_2; \text{ a) } V < 2g\tau_2; (j_1)_{\max.} = \varepsilon_{11}\left(2 + \frac{c}{2}\right);$$

$$\text{b) } V > 2g\tau_2; (j_1)_{\max.} = \varepsilon_{11}(2 + c) - \varepsilon_{21};$$

$$(j_2)_{\max.} = \varepsilon_{12}(2 + c);$$

Det är att märka, att i detta speciella fall liksom i de generella, som i det följande skola behandlas, de erhållna maximalvärdena på j endast gälla, då stafvarne råkas första gången. Det kan nämligen hända, att kompressionerna blifva större andra gången de råkas. Detta skall visas genom ett exempel i följande kap.

Kap. 3.

I detta exempel antages, att $\tau_1 < \tau_2$ och $V > 4g\tau_1$. Stafvarne skiljas då åt vid tiden $2\tau_1 + 2\tau_2$. Efter denna tid blir rörelseeqvationen för stafven 2:

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} = k_2^2 \frac{d^2 u_2}{dx^2};$$

och gränsvilkoren:

$\left(\frac{du_2}{dx}\right)_{x=a_1} = 0$; $(u_2)_{x=a_1+a_2} = 0$; $\left(\frac{du_2}{dx}\right)_{t=0} = -\frac{2ga_1}{k_1 k_2}$; och $\left(\frac{du_2}{dt}\right)_{t=0} = 0$; om t räknas från det ögonblick, då stafvarne skiljas.

Rörelseeqvationen ger:

$$u_2 = f_2(x + k_2 t) + F_2(x - k_2 t);$$

För $0 < t < \infty$ gälla:

$$(1) \quad f'_2(a_1 + k_2 t) + F'_2(a_1 - k_2 t) = 0; \text{ och } f_2(a_1 + a_2 + k_2 t) + F_2(a_1 + a_2 - k_2 t) = 0;$$

För $a_1 < x < a_1 + a_2$ gälla:

$$(2) \quad f'_2(x) + F'_2(x) = -\frac{2ga_1}{k_1 k_2} \text{ och } f'_2(x) - F'_2(x) = 0;$$

$$\text{Af eqv. (1) får man: } \left. \begin{aligned} f'_2\left(x = \frac{\infty}{a_1}\right) &= -F'_2(2a_1 - x); \\ f'_2\left(x = \frac{\infty}{a_1 + a_2}\right) &= F'_2(2a_1 + 2a_2 - x); \end{aligned} \right\}$$

$$\text{och af eqv. (2). } \left. \begin{aligned} f'_2\left(x = \frac{a_1 + a_2}{a_1}\right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2}; \\ F'_2\left(x = \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2}; \end{aligned} \right\}$$

Af dessa 4 eqv. får man följande värden på f'_2 och F'_2 :

$$\begin{aligned} f'_2\left(\frac{a_1 + 2a_2}{a_1}\right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2}; & f'_2\left(\frac{a_1 + 4a_2}{a_1 + 2a_2}\right) &= \frac{ga_1}{k_1 k_2}; & f'_2\left(\frac{a_1 + 6a_2}{a_1 + 4a_2}\right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2}; \\ F'_2\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2}; & F'_2\left(\frac{a_1 - 2a_2}{a_1}\right) &= \frac{ga_1}{k_1 k_2}; & F'_2\left(\frac{a_1 - 4a_2}{a_1 - 2a_2}\right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2}; \end{aligned}$$

För den fria stafven gälla:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_1}{dt^2} &= k_1^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + g; \quad \left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1} = 0; \\ \left(\frac{du_1}{dx}\right)_{t=0} &= -\frac{2gx}{k_1^2}; \quad \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0} = -V;\end{aligned}$$

Häraf: $u_1 = f_1(x + k_1 t) + F_1(x - k_1 t) - \frac{gx^2}{2k_1^2}$; jemte

$$(3) \quad f'_1(k_1 t) + F'_1(-k_1 t) = 0; \quad f'_1(a_1 + k_1 t) + F'_1(a_1 - k_1 t) = \frac{ga_1}{k_1^2}; \quad [0 < t < \infty]$$

$$(4) \quad f'_1(x) + F'_1(x) = -\frac{gx}{k_1^2}; \quad f'_1(x) - F'_1(x) = -\frac{V}{k_1}; \quad [0 < x < a_1]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Af (3) får man: } f'_1\left(x = \frac{\infty}{0}\right) &= F'_1(-x); \\ F'_1\left(x = -\frac{\infty}{a_1}\right) &= -\frac{ga_1}{k_1^2} + F'_1(2a_1 + x); \end{aligned} \right\}$$

$$\text{och af (4):} \quad \left. \begin{aligned} f'_1\left(\frac{a_1}{0}\right) &= -\frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}; \\ F'_1\left(\frac{0}{a_1}\right) &= -\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}; \end{aligned} \right\}$$

Af dessa fås följande värden på f'_1 och F'_1 :

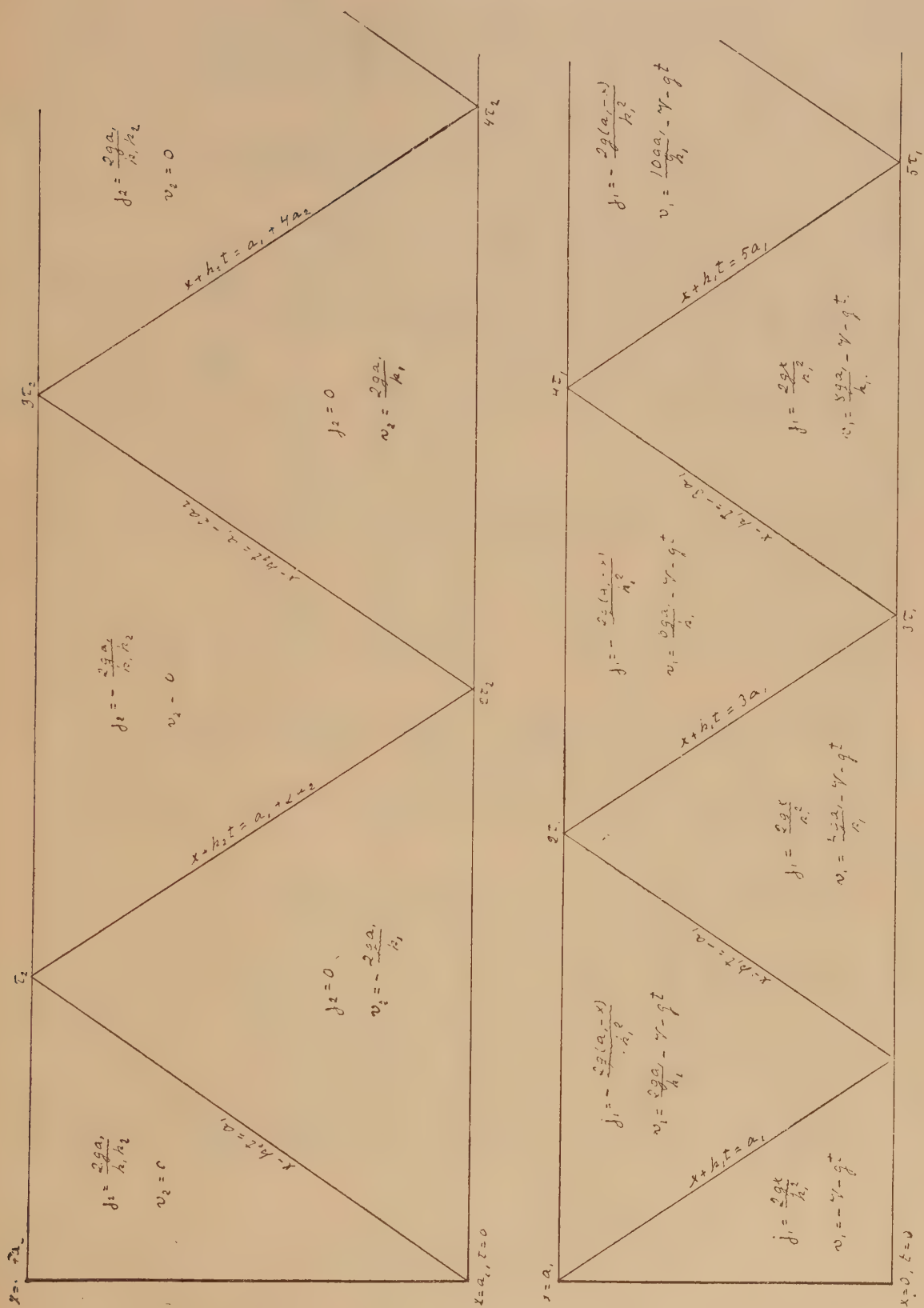
$$\begin{aligned} f'_1\left(\frac{a_1}{0}\right) &= -\frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}; & f'_1\left(\frac{3a_1}{a_1}\right) &= \frac{2ga_1}{k_1^2} - \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}; \\ F'_1\left(\frac{-a_1}{a_1}\right) &= -\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}; & F'_1\left(\frac{-3a_1}{-a_1}\right) &= -\frac{2ga_1}{k_1^2} - \frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_1\left(\frac{(2n+1)a_1}{(2n-1)a_1}\right) &= \frac{2nga_1}{k_1^2} - \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}; \\ F'_1\left(\frac{-(2n+1)a_1}{-(2n-1)a_1}\right) &= -\frac{2nga_1}{k_1^2} - \frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}; \end{aligned}$$

Här betyder n ett helt tal hvilket som helst.

Stafvarne röra sig så, som diagrammen å nästa sida visa.

Antag nu, att stafvarne råkas efter tiden T , och att $T = 2n\tau_1 + t' = 2n'\tau_2 + t''$, der $t' < 2\tau_1$ och $t'' < 2\tau_2$. Antag vidare, att vid tiden T man har:



$$\begin{aligned}
\text{för} \quad & 0 < x < a_1^1: \frac{du_1}{dx} = -\frac{2gx}{k_1^2}; \quad \text{och} \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{4(n+1)ga_1}{k_1} - V - gT; \\
,, \quad & a_1^1 < x < a_1: \frac{du_1}{dx} = \frac{2g(a_1 - x)}{k_1^2}; \quad ,, \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{2(2n+1)ga_1}{k_1} - V - gT; \\
,, \quad & a_1 < x < a_1 + a_2^1: \frac{du_2}{dx} = 0; \quad ,, \quad \frac{du_2}{dt} = \frac{2ga_1}{k_1}; \\
\text{för } a_1 + a_2^1 < x < a_1 + a_2: \quad & \frac{du_2}{dx} = -\frac{2ga_1}{k_1k_2}; \quad ,, \quad \frac{du_2}{dt} = 0;
\end{aligned}$$

Alla dessa antaganden uttrycka ett möjligt tillstånd. Under dessa förutsättningar får man, om man räknar tiden från T :

$$\begin{aligned}
f'_1(x = a_1^1) + F'_1(x) &= -\frac{gx}{k_1^2}; \quad \text{och} \quad f'_1(x = a_1^1) - F'_1(x) = \frac{4(n+1)ga_1}{k_1^2} - \\
&\quad - \frac{V}{k_1} - \frac{gT}{k_1} = \frac{2ga_1}{k_1^2} + \frac{v_1^1}{k_1}; \\
f'_1(x = a_1^1) + F'_1(x) &= \frac{2ga_1}{k_1^2} - \frac{gx}{k_1^2}; \quad ,, \quad f'_1(x = a_1^1) - F'_1(x) = \frac{2(2n+1)ga_1}{k_1^2} - \\
&\quad - \frac{V}{k_1} - \frac{gT}{k_1} = \frac{v_1^1}{k_1}; \\
f'_2(x = a_1 + a_2^1) + F'_2(x) &= 0; \quad ,, \quad f'_2(x = a_1 + a_2^1) - F'_2(x) = \frac{2ga_1}{k_1k_2}; \\
f'_2(x = a_1 + a_2^1) + F'_2(x) &= -\frac{2ga_1}{k_1k_2}; \quad ,, \quad f'_2(x = a_1 + a_2^1) - F'_2(x) = 0;
\end{aligned}$$

Dessa eqvationer tillsammans med formlerna B' i föregående kap. bestämma följande värden på f' etc.

$$\begin{aligned}
f'_1(a_1) &= \frac{ga_1}{k_1^2} - \frac{gx}{2k_1^2} + \frac{v_1^1}{2k_1}; & f'_1(a_1 + \frac{a_2^1}{k_2}k_1) &= \frac{3ga_1}{2k_1^2}; \\
F'_1(a_1) &= \frac{ga_1}{k_1^2} - \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{v_1^1}{2k_1}; & F'_1(a_1^1) &= -\frac{ga_1}{k_1^2} - \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{v_1^1}{2k_1}; \\
f'_2(a_1 + a_2^1) &= \frac{ga_1}{k_1k_2}; & f'_2(a_1 + 2a_2) &= -\frac{ga_1}{k_1k_2}; \\
F'_2(a_1 + a_2) &= -\frac{ga_1}{k_1k_2}; & F'_2(a_1 - (a_1 - a_1^1)\frac{k_2}{k_1}) &= \frac{g(a_1 - x)}{2k_2^2} - \frac{v_1^1}{2k_2};
\end{aligned}$$

$$f'_1 \begin{pmatrix} a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \\ a_1 + \frac{a_2^1}{k_2} k_1 \end{pmatrix} = -\frac{ga_1}{2k_1^2}$$

$$F'_1 \begin{pmatrix} -a_1 - \frac{a_2^1}{k_2} k_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} = -\frac{3ga_1}{2k_1^2};$$

$$f'_1 \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 + (a_1 - a_1^1) \frac{k_2}{k_1} \\ a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} = \frac{g(x - a_1 - 2a_2)}{2k_2^2} - \frac{v_1^1}{2k_2};$$

$$F'_2 \begin{pmatrix} a_1 - \frac{2a_1}{k_1} k_2 \\ a_1 - (a_1 - a_1^1) \frac{k_2}{k_1} \end{pmatrix} = -\frac{2ga_1}{k_1 k_2} + \frac{g(a_1 - x)}{2k_2^2} - \frac{v_1^1}{2k_2};$$

$$f'_1 \begin{pmatrix} 2a_1 - a_1^1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \\ a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \end{pmatrix} = \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{ga_2}{k_1 k_2} - \frac{v_1^1}{2k_1};$$

$$F'_1 \begin{pmatrix} -a_1 - \frac{2a_2}{k_2} k_1 \\ -a_1 - \frac{a_2^1}{k_2} k_1 \end{pmatrix} = \frac{ga_1}{2k_1^2};$$

$$f'_2 \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 + \frac{2a_1}{k_1} k_2 \\ a_1 + 2a_2 + (a_1 - a_1^1) \frac{k_2}{k_1} \end{pmatrix} = -\frac{2ga_1}{k_1 k_2} + \frac{g(x - a_1 - 2a_2)}{2k_2^2} - \frac{v_1^1}{2k_2};$$

$$f'_1 \begin{pmatrix} 3a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \\ 2a_1 - a_1^1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \end{pmatrix} = \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{2ga_1}{k_1^2} - \frac{ga_2}{k_1 k_2} - \frac{v_1^1}{2k_1};$$

Diagrammet kan få det utseende, som visas å nästa sida.

Här ligger största kompressionen hos den fria stafven i det fält, som begränsas af lininerna $x + k_1 t = 2a_1 - a_1^1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1$; $x - k_1 t = -a_1 - \frac{a_2^1}{k_2} k_1$; och $x = a_1$;

$$\begin{aligned} \text{och } (j_1)_{\max.} = & \frac{4ga_1}{k_1^2} + \frac{ga_2}{k_1k_2} - \frac{g}{2k_1}(2\tau_1 - t' + 2\tau_2) + \frac{v_1^1}{2k_1} = \frac{3ga_1}{k_1^2} + \frac{gt'}{2k_1} + \\ & + \frac{(2n+1)ga_1}{k_1^2} - \frac{V}{2k_1} - \frac{gT}{2k_1} = \frac{4ga_1}{k_1^2} + \frac{gt'}{2k_1} + \frac{2nga_1}{k_1^2} - \\ & - \frac{cga_1}{2k_1^2} - \frac{g(2n\tau_1 + t')}{2k_1} = \frac{4ga_1}{k_1^2} + \frac{nga_1}{k_1^2} - \frac{cga_1}{2k_1^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hos den andra är } (j_2)_{\max.} \text{ i det fält, som begränsas af } x + k_2t = a_1 + \\ + 2a_2 + (a_1 - a_1^1)\frac{k_2}{k_1}; \quad x - k_2t = a_1 - \frac{2a_1}{k_1}k_2; \quad \text{och } x = a_1 + a_2; \quad \text{och } (j_2)_{\max.} = \frac{4ga_1}{k_1k_2} - \\ - \frac{g[k_2(2\tau_1 - t' + \tau_2) - a_2]}{k_2^2} + \frac{2(2n+1)ga_1}{k_1k_2} - \frac{cga_1}{k_1k_2} - \frac{g(2n\tau_1 + t')}{k_2} = \\ = \frac{4ga_1}{k_1k_2} + \frac{2nga_1}{k_1k_2} - \frac{cga_1}{k_1k_2}; \end{aligned}$$

För att uttrycka n i c kan man sätta $(u_1)_{a_1} = (u_2)_{a_1}$ vid tiden T .

$$(u_2)_{a_1} \text{ är då } = \frac{2ga_1}{k_1k_2} \cdot k_2[T - (2n' + 1)\tau_2] = \frac{2ga_1}{k_1k_2}[k_2t'' - a_2] = 2g\tau_1t'' - 2g\tau_1\tau_2 \quad \text{och}$$

$$\begin{aligned} (u_1)_{a_1} = & \frac{2ga_1a_2}{k_1k_2} + \int_0^{2\tau_1} \left(\frac{2ga_1}{k_1} - V - gt \right) dt + \int_{2\tau_1}^{4\tau_1} \left(\frac{6ga_1}{k_1} - V - gt \right) dt + \int_{4\tau_1}^{6\tau_1} \left(\frac{10ga_1}{k_1} - V - gt \right) dt + \\ & + \dots + \int_{2(n-1)\tau_1}^{2n\tau_1} \left(\frac{2(2n-1)ga_1}{k_1} - V - gt \right) dt + \int_{2n\tau_1}^T \left(\frac{2(2n+1)ga_1}{k_1} - V - gt \right) dt = \\ & = \frac{2ga_1a_2}{k_1k_2} - VT - \frac{gT^2}{2} + 4g\tau_1^2[1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)] + 2(2n+1)g\tau_1(T - \\ & - 2n\tau_1) = 2g\tau_1\tau_2 - VT - \frac{gT^2}{2} + 4n^2g\tau_1^2 - 4n(2n+1)g\tau_1^2 + 2(2n+1)g\tau_1T = \\ & = 2g\tau_1\tau_2 - VT - \frac{gT^2}{2} - 4n(n+1)g\tau_1^2 + 2(2n+1)g\tau_1T = \\ & = 2g\tau_1\tau_2 - cg\tau_1(2n\tau_1 + t') + 2n^2g\tau_1^2 + 2(n+1)g\tau_1t' - \frac{gt'^2}{2}; \end{aligned}$$

Man får alltså;

$$2g\tau_1\tau_2 - cg\tau_1(2n\tau_1 + t') + 2n^2g\tau_1^2 + 2(n+1)g\tau_1t' - \frac{gt'^2}{2} = 2g\tau_1t'' - 2g\tau_1\tau_2;$$

$$\text{d. v. s. } n = \frac{c}{2} - \frac{t'}{2\tau_1} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{t'^2}{2\tau_1^2} - \frac{2\tau_2}{\tau_1} - \frac{t'}{\tau_1} + \frac{t''}{\tau_1}};$$

$$(j_1)_{\max.} \text{ blir } = \frac{ga_1}{k_1^2} \left[4 - \frac{t'}{2\tau_1} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{t'^2}{2\tau_1^2} - \frac{2\tau_2}{\tau_1} - \frac{t'}{\tau_1} + \frac{t''}{\tau_1}} \right]$$

Detta värde på j_1 är större än det största, då stafvarne råkades första gången. Det kan i ogynnsammaste fall uppgå till $\frac{ga_1}{k_1^2} \frac{7 + \sqrt{c^2 - 6}}{2}$; Likaså kan det ofvan erhållna värdet på j_2 uppgå till $\frac{ga_1}{k_1 k_2} [3 + \sqrt{c^2 - 2}]$;

Kap. 4.

Trigonometrisk lösning.

De allmänna lösningarna till rörelseeqvationerna äro:

$$\begin{aligned} u_1 = \sum & \left[\left(A \cos \frac{nx}{k_1} + B \sin \frac{nx}{k_1} \right) \sin nt + \left(A_1 \cos \frac{n_1 x}{k_1} + B_1 \sin \frac{n_1 x}{k_1} \right) \cos n_1 t \right] - \\ & - \frac{gx^2}{2k_1^2} + Ex + F; \\ u_2 = \sum & \left[\left(A' \cos \frac{n'x}{k_2} + B' \sin \frac{n'x}{k_2} \right) \sin n't + \left(A'_1 \cos \frac{n'_1 x}{k_2} + B'_1 \sin \frac{n'_1 x}{k_2} \right) \cos n'_1 t \right] + \\ & + Cx + D; \end{aligned}$$

Dessa skola satisfiera följande gränsvilkor:

$$1. \quad \left(\frac{du_1}{dx} \right)_{x=0} = 0; \text{ Då blir } B = B_1 = E = 0;$$

$$2. \quad (u_2)_{x=a_1+a_2} = 0; \text{ Här af får man:}$$

$$A' \cos \frac{n'(a_1 + a_2)}{k_2} + B' \sin \frac{n'(a_1 + a_2)}{k_2} = 0;$$

$$A'_1 \cos \frac{n'_1(a_1 + a_2)}{k_2} + B'_1 \sin \frac{n'_1(a_1 + a_2)}{k_2} = 0;$$

$$D = -C(a_1 + a_2);$$

u_1 och u_2 blifva då:

$$u_1 = \sum \left(A \cos \frac{nx}{k_1} \sin nt + A_1 \cos \frac{n_1 x}{k_1} \cos n_1 t \right) - \frac{gx^2}{2k_1^2} + F;$$

$$u_2 = \sum \left(A' \sin \frac{n'(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \sin n't + A'_1 \sin \frac{n'_1(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \cos n'_1 t \right) +$$

$$+ C(x - a_1 - a_2);$$

Några konstanter äro här inlagda i A' och A'_1 .

3. $(u_1)_{x=a_1} = (u_2)_{x=a_1}$; Detta villkor är uppfyllt, om man bestämmer konstanterna så, att

$$u_1 = \sum \left(\frac{A \cos \frac{nx}{k_1} \sin nt + A_1 \cos \frac{n_1 x}{k_1} \cos n_1 t}{\cos \frac{na_1}{k_1}} \right) - \frac{gx^2}{2k_1^2} - Ca_2 + \frac{ga_1^2}{2k_1^2};$$

$$u_2 = \sum \left(\frac{A \sin \frac{n(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \sin nt + A_1 \sin \frac{n_1(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \cos n_1 t}{\sin \frac{na_2}{k_2}} \right) +$$

$$+ C(x - a_1 - a_2);$$

4. $\left(\frac{du_1}{dx} \right)_{x=a_1} = r \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{du_2}{dx} \right)_{x=a_1}$; Härför fordras, att $C = -\frac{ga_1}{rk_1 k_2}$; samt att $n = n_1$

satisfierar följande equation: $tg \frac{na_1}{k_1} - r \cot \frac{na_2}{k_2} = 0$, (A). Man får då:

$$u_1 = \sum \left(\frac{A \cos \frac{nx}{k_1} \sin nt + A_1 \cos \frac{nx}{k_1} \cos nt}{\cos \frac{na_1}{k_1}} \right) - \frac{gx^2}{2k_1^2} + \frac{ga_1 a_2}{rk_1 k_2} + \frac{ga_1^2}{2k_1^2};$$

$$u_2 = \sum \left(\frac{A \sin \frac{n(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \sin nt + A_1 \sin \frac{n(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \cos nt}{\sin \frac{na_2}{k_2}} \right) +$$

$$+ \frac{ga_1(a_1 + a_2 - x)}{rk_1 k_2};$$

5. $(u_1)_{t=0} = 0$; $(u_2)_{t=0} = 0$; Det är:

$$\sum \frac{A_1 \cos \frac{nx}{k_1}}{\cos \frac{na_1}{k_1}} = \frac{gx^2}{2k_1^2} - \frac{ga_1a_2}{rk_1k_2} - \frac{ga_1^2}{2k_1^2};$$

och

$$\sum \frac{A_1 \sin \frac{n(a_1 + a_2 - x)}{k_2}}{\sin \frac{na_2}{k_2}} = -\frac{ga_1(a_1 + a_2 - x)}{rk_1k_2};$$

Multipluera den första af dessa eqvationer med $\frac{m_1 \cos \frac{n'x}{k_1}}{\cos \frac{n'a_1}{k_1}} dx$, och integrera

den från 0 till a_1 och den andra med $\frac{m_2 \sin \frac{n'(a_1 + a_2 - x)}{k_2}}{\sin \frac{n'a_2}{k_2}} dx$, och integrera från

a_1 till $a_1 + a_2$! Om man sedan adderar dem, får man:

$$\begin{aligned} m_1 \sum_n \int_0^{a_1} \frac{A_1 \cos \frac{nx}{k_1}}{\cos \frac{na_1}{k_1}} \cdot \frac{\cos \frac{n'x}{k_1}}{\cos \frac{n'a_1}{k_1}} dx + m_2 \sum_n \int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{A_1 \sin \frac{n(a_1 + a_2 - x)}{k_2}}{\sin \frac{na_2}{k_2}} \cdot \frac{\sin \frac{n'(a_1 + a_2 - x)}{k_2}}{\sin \frac{n'a_2}{k_2}} dx \\ = \frac{m_1 g}{2k_1^2} \int_0^{a_1} x^2 \frac{\cos \frac{n'x}{k_1}}{\cos \frac{n'a_1}{k_1}} dx - \frac{m_1 g a_1}{k_1} \left(\frac{a_2}{rk_2} + \frac{a_1}{2k_1} \right) \int_0^{a_1} \frac{\cos \frac{n'x}{k_1}}{\cos \frac{n'a_1}{k_1}} dx - \\ - \frac{m_2 g a_1}{rk_1k_2} \int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{(a_1 + a_2 - x) \cdot \sin \frac{n'(a_1 + a_2 - x)}{k_2}}{\sin \frac{n'a_2}{k_2}} dx; \quad (B) \end{aligned}$$

Härvid inträffar det egendomliga, att, om n och n' äro två olika rötter till eqvationen (A), försvinner på grund af denna eqvation följande integral-summa:

$$m_1 \int_0^{a_1} \frac{\cos \frac{nx}{k_1}}{\cos \frac{na_1}{k_1}} \cdot \frac{\cos \frac{n'x}{k_1}}{\cos \frac{n'a_1}{k_1}} dx + m_2 \int_{a_1}^{a_1+a_2} \frac{\sin \frac{n(a_1+a_2-x)}{k_2}}{\sin \frac{na_2}{k_2}} \cdot \frac{\sin \frac{n'(a_1+a_2-x)}{k_2}}{\sin \frac{n'a_2}{k_2}} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{ty hon är} &= \frac{m_1 k_1}{2(n+n')} \left[g \frac{na_1}{k_1} + tg \frac{n'a_1}{k_1} \right] + \frac{m_1 k_1}{2(n-n')} \left[tg \frac{na_1}{k_1} - tg \frac{n'a_1}{k_1} \right] + \\ &+ \frac{m_2 k_2}{2(n-n')} \left[\cot \frac{n'a_2}{k_2} - \cot \frac{na_2}{k_2} \right] - \frac{m_2 k_2}{2(n+n')} \left[\cot \frac{n'a_2}{k_2} + \cot \frac{na_2}{k_2} \right] = 0; \end{aligned}$$

Vidare är:

$$\frac{m_1 A_1}{\cos^2 \frac{na_1}{k_1}} \int_0^{a_1} \cos^2 \frac{nx}{k_1} dx = \frac{m_1 A_1 k_1}{n \cos^2 \frac{na_1}{k_1}} \left[\frac{na_1}{2k_1} + \frac{1}{4} \sin \frac{2na_1}{k_1} \right];$$

$$\frac{m_2 A_1}{\sin^2 \frac{na_2}{k_2}} \int_{a_1}^{a_1+a_2} \sin^2 \frac{n(a_1+a_2-x)}{k_2} dx = \frac{m_2 A_1 k_2}{n \sin^2 \frac{na_2}{k_2}} \left[\frac{na_2}{2k_2} - \frac{1}{4} \sin \frac{2na_2}{k_2} \right];$$

$$\frac{m_1 g}{2k_1^2 \cos \frac{na_1}{k_1}} \int_0^{a_1} x^2 \cos \frac{nx}{k_1} dx = \frac{m_1 g k_1}{2n^3 \cos \frac{na_1}{k_1}} \left[\left(\frac{na_1}{k_1} \right)^2 \sin \frac{na_1}{k_1} + \frac{2na_1}{k_1} \cos \frac{na_1}{k_1} - 2 \sin \frac{na_1}{k_1} \right];$$

$$- \frac{m_1 g a_1}{k_1} \left(\frac{a_2}{rk_2} + \frac{a_1}{2k_1} \right) \frac{1}{\cos \frac{na_1}{k_1}} \int_0^{a_1} \cos \frac{nx}{k_1} dx = - \frac{m_1 g a_1}{n} \left(\frac{a_2}{rk_2} + \frac{a_1}{2k_1} \right) tg \frac{na_1}{k_1};$$

$$- \frac{m_2 g a_1}{rk_1 k_2 \sin \frac{na_2}{k_2}} \int_{a_1}^{a_1+a_2} (a_1+a_2-x) \cdot \sin \frac{n(a_1+a_2-x)}{k_2} dx = \frac{m_2 g a_1 k_2}{n^2 r k_1} \left[\frac{na_2}{k_2} \cot \frac{na_2}{k_2} - 1 \right];$$

Genom insättning af dessa värden i eqv. (B) får man:

$$\frac{m_1 A_1 k_1}{2n \cos^2 \frac{na_1}{k_1}} \left[\frac{na_1}{k_1} + \sin \frac{na_1}{k_1} \cos \frac{na_1}{k_1} \right] + \frac{m_2 A_1 k_2}{2n \sin^2 \frac{na_2}{k_2}} \left[\frac{na_2}{k_2} - \sin \frac{na_2}{k_2} \cos \frac{na_2}{k_2} \right] =$$

$$= -\frac{m_1 g k_1}{2n^3 \cos \frac{k}{k_1}} \left[\left(\frac{na_1}{k_1} \right)^2 \sin \frac{na_1}{k_1} + \frac{2na_1}{k_1} \cos \frac{na_1}{k_1} - 2 \sin \frac{na_1}{k_1} \right] - \frac{m_1 g a_1}{n} \left(\frac{a_2}{rk_2} + \frac{a_1}{2k_1} \right) \operatorname{tg} \frac{na_1}{k_1} +$$

$$+ \frac{m_2 g a_1 k_2}{n^2 r k_1} \left[\frac{na_2}{k_2} \cot \frac{na_2}{k_2} - 1 \right]; \text{ d. v. s. } \frac{A_1}{2} \left[\frac{m_1 a_1}{\cos^2 \frac{na_1}{k_1}} + \frac{m_2 a_2}{\sin^2 \frac{na_1}{k_1}} \right] = -\frac{m_1 g k_1}{n^3} \operatorname{tg} \frac{na_1}{k_1};$$

$$6. \quad \left(\frac{du_1}{dt} \right)_{t=0} = V; \quad \left(\frac{du_2}{dt} \right)_{t=0} = 0; \text{ D. v. s. } \sum \frac{An \cos \frac{nx}{k_1}}{\cos \frac{na_1}{k_1}} = V;$$

$$\sum \frac{An \sin \frac{n(a_1 + a_2 - x)}{k_2}}{\sin \frac{na_2}{k_2}} = 0;$$

Om man förfar på samma sätt som vid bestämningen af A_1 , får man:

$$\sum \frac{m_1 An}{\cos \frac{na_1}{k_1} \cdot \cos \frac{n'a_1}{k_1}} \int_0^{a_1} \cos \frac{nx}{k_1} \cdot \cos \frac{n'x}{k_1} dx + \sum \frac{m_2 An}{\sin \frac{na_2}{k_2} \sin \frac{n'a_2}{k_2}} \int_{a_1}^{a_1+a_2} \sin \frac{n(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \cdot \sin \frac{n'(a_1 + a_2 - x)}{k_2} dx =$$

$$\frac{Vm_1}{\cos \frac{n'a_1}{k_1}} \int_0^{a_1} \cos \frac{n'x}{k_1} dx;$$

Häraf:

$$\frac{nA}{2} \left[\frac{m_1 a_1}{\cos^2 \frac{na_1}{k_1}} + \frac{m_2 a_2}{\sin^2 \frac{na_2}{k_2}} \right] = \frac{Vm_1 k_1}{n} \operatorname{tg} \frac{na_1}{k_1};$$

Genom insättning af värdena på A och A_1 i uttrycken för u får man:

$$u_1 = \frac{ga_1 a_2}{rk_1 k_2} + \frac{g(a_1^2 - x^2)}{2k_1^2} + 2m_1 k_1 \sum \frac{\operatorname{tg} \frac{na_1}{k_1} \cdot \cos \frac{nx}{k_1} \left[\frac{V}{n^2} \sin nt - \frac{g}{n^3} \cos nt \right]}{\cos \frac{na_1}{k_1} \left[\frac{m_1 a_1}{\cos^2 \frac{na_1}{k_1}} + \frac{m_2 a_2}{\sin^2 \frac{na_2}{k_2}} \right]};$$

$$u_2 = \frac{ga_1(a_1 + a_2 - x)}{rk_1 k_2} + 2m_1 k_1 \sum \frac{\operatorname{tg} \frac{na_1}{k_1} \sin \frac{n(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \left[\frac{V}{n^2} \sin nt - \frac{g}{n^3} \cos nt \right]}{\sin \frac{na_2}{k_2} \left[\frac{m_1 a_1}{\cos^2 \frac{na_1}{k_1}} + \frac{m_2 a_2}{\sin^2 \frac{na_2}{k_2}} \right]};$$

Häraf får man:

$$j_1 = \frac{gx}{k_1^2} + 2m_1 \sum \frac{tg \frac{na_1}{k_1} \sin \frac{nx}{k_1} \left[\frac{V}{n} \sin nt - \frac{g}{n^2} \cos nt \right]}{\cos \frac{na_1}{k_1} \left[\frac{m_1 a_1}{\cos^2 \frac{na_1}{k_1}} + \frac{m_2 a_2}{\sin^2 \frac{na_2}{k_2}} \right]};$$

$$j_2 = \frac{ga_1}{rk_1 k_2} + \frac{2m_2}{r} \sum \frac{tg \frac{na_1}{k_1} \cos \frac{n(a_1 + a_2 - x)}{k_2} \left[\frac{V}{n} \sin nt - \frac{g}{n^2} \cos nt \right]}{\sin \frac{na_2}{k_2} \left[\frac{m_1 a_1}{\cos^2 \frac{na_1}{k_1}} + \frac{m_2 a_2}{\sin^2 \frac{na_2}{k_2}} \right]};$$

Af uttrycket för j_2 kan man draga den viktiga slutsatsen, att j_2 är störst för $x = a_1 + a_2$.

För det speciella fallet $g = 0$ hafva liknande uttryck för u_1 och u_2 uppställt af de Saint-Venant i Comptes Rendus tome XCV p. 359.

Kap. 5.

Generel lösning i finit form, då $\tau_1 < \tau_2$.

Antag, att $n\tau_1 < \tau_2 < (n+1)\tau_1$, der n betecknar ett helt tal!

$$\text{Af formlerna } \left. \begin{aligned} f'_1(a_1) &= \frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}; \\ F'_1(a_1) &= \frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}; \\ f'_2(a_1 + 2a_2) &= 0; \\ F'_2(a_1 + a_2) &= 0; \end{aligned} \right\} \text{ A och}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_1\left(x = \frac{\infty}{a_1}\right) &= -F'_1(-x) = \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} - \frac{1-r}{1+r}F'_1(2a_1-x) + \frac{2rk_2}{k_1(1+r)} \\ &\quad \cdot f'_2\left[a_1 + \frac{k_2}{k_1}(x-a_1)\right]; \\ F'_2\left(x = \frac{\infty}{a_1}\right) &= f'_2(2a_1+2a_2-x) = -\frac{ga_1}{k_1k_2(1+r)} + \frac{2k_1}{k_2(1+r)} \\ &\quad \cdot F'_1\left[a_1 - \frac{k_1}{k_2}(a_1-x)\right] + \frac{1-r}{1+r}f'_2(2a_1-x); \end{aligned} \right\} \text{ B}$$

får man, om n' betecknar ett helt tal $< n$:

$$\begin{aligned} f'_1\left(x = \frac{\infty}{a_1}\right) &= -F'_1(-x) = \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} + \frac{1-r}{1+r}f'_1(x-2a_1) + \frac{2rk_2}{k_1(1+r)} \\ &\quad \cdot f'_2\left[a_1 + \frac{k_2}{k_1}(x-a_1)\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_1\left(\frac{(2n'+1)a_1}{(2n'-1)a_1}\right) &= \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)}\left[1 + \frac{1-r}{1+r} + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'-1}\right] - \frac{n'ga_1(1-r)^{n'}}{k_1^2(1+r)} + \\ &\quad + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}\left(\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}\right) = \frac{ga_1}{2k_1^2r}\left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} - 2rn'\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}\right] + \\ &\quad + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}\left(\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1}\right); \end{aligned}$$

$$F'_1\left(\frac{-(2n'+1)a_1}{-(2n'-1)a_1}\right) = -\frac{ga_1}{2k_1^2r}\left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} - 2rn'\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}\right] + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}\left(\frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}\right);$$

$$\begin{aligned} F'_2\left(\frac{a_1 - 2(n'+1)\frac{a_1k_2}{k_1}}{a_1 - \frac{2n'a_1k_2}{k_1}}\right) &= -\frac{ga_1}{k_1k_2(1+r)} + \frac{2k_1}{k_2(1+r)}\left[-\frac{ga_1}{2k_1^2r}\left\{1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2rn'\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}\right\} + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}\left\{\frac{g(a_1 - \frac{k_1}{k_2}(a_1-x))}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1}\right\}\right] = \\ &= -\frac{ga_1}{k_1k_2r(1+r)}\left[1 + r - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}(1+r+2rn')\right] - \\ &\quad - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}\left[\frac{g(a_1-x)}{k_2^2(1+r)} + \frac{V}{k_2(1+r)}\right]; \end{aligned}$$

$$f'_2 \left(\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + (2n' + 1) \frac{a_1}{k_1} k_2 \\ a_1 + 2a_2 + \frac{2n'a_1}{k_1} k_2 \end{matrix} \right) = - \frac{ga_1}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1 + r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} (1 + r + 2rn') \right] -$$

$$- \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} \left[\frac{g(x - a_1 - 2a_2)}{k_2^2 (1+r)} + \frac{V}{k_2 (1+r)} \right];$$

$$f'_1 \left(\begin{matrix} a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \\ (2n + 1)a_1 \end{matrix} \right) = \frac{ga_1}{2k_1^2 r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} (1 + 2r + 2rn) \right] + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \left[\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1} \right];$$

$$F'_1 \left(\begin{matrix} -a_1 - \frac{2a_2}{k_2} k_2 \\ (2n + 1)a_1 \end{matrix} \right) = - \frac{ga_1}{2k_1^2 r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} (1 + 2r + 2rn) \right] +$$

$$+ \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \left[\frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1} \right];$$

$$f'_2 \left(\begin{matrix} a_1 + 4a_2 \\ a_1 + 2a_2 + \frac{2na_1}{k_1} k_2 \end{matrix} \right) = - \frac{ga_1}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1 + r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n (1 + r + 2rn) \right] -$$

$$- \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \left[\frac{g(x - a_1 - 2a_2)}{k_2^2 (1+r)} + \frac{V}{k_2 (1+r)} \right];$$

$$F'_2 \left(\begin{matrix} a_1 - \frac{2a_2}{k_1} k_2 \\ a_1 - \frac{2na_1}{k_1} k_2 \end{matrix} \right) = - \frac{ga_1}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1 + r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n (1 + r + 2rn) \right] -$$

$$- \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \left[\frac{g(a_1 - x)}{k_2^2 (1+r)} + \frac{V}{k_2 (1+r)} \right];$$

$$f'_1 \left(\begin{matrix} (2n + 3)a_1 \\ a_1 + \frac{2a_2}{k_2} k_1 \end{matrix} \right) = \frac{ga_1}{2k_1^2 r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} (1 + 2r + 2rn) + \frac{4r^2}{(1+r)^2} \right] + \frac{4gra_2}{k_1 k_2 (1+r)^2} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} - \frac{4r}{(1+r)^2} \right] \left[\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1} \right];$$

$$F'_1 \left(\begin{matrix} -(2n + 3)a_1 \\ -a_1 - \frac{2a_2}{k_2} k_1 \end{matrix} \right) = - \frac{ga_1}{2k_1^2 r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} (1 + 2r + 2rn) + \frac{4r^2}{(1+r)^2} \right] -$$

$$- \frac{4gra_2}{k_1 k_2 (1+r)^2} + \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} - \frac{4r}{(1+r)^2} \right] \left[\frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1} \right];$$

$$\begin{aligned}
f'_2 \left(\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + 2(n+1)\frac{a_1 k_2}{k_1} \\ a_1 + 4a_2 \end{matrix} \right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2 r(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n (1+r+2rn) \right] - \\
&\quad - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \left[\frac{g(x-a_1-2a_2)}{k_2^2(1+r)} + \frac{V}{k_2(1+r)} \right] + \frac{1-r}{1+r} \left[\frac{g(a_1+4a_2-x)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} \right]; \\
F'_2 \left(\begin{matrix} a_1 - 2(n+1)\frac{a_1 k_2}{k_1} \\ a_1 - 2a_2 \end{matrix} \right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2 r(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n (1+r+2rn) \right] - \\
&\quad - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \left[\frac{g(a_1-x)}{k_2^2(1+r)} + \frac{V}{k_2(1+r)} \right] + \frac{1-r}{1+r} \left[\frac{g(x-a_1+2a_2)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} \right]; \\
f'_1 \left(\begin{matrix} 3a_1 + \frac{2a_2 k_1}{k_2} \\ (2n+3)a_1 \end{matrix} \right) &= \frac{ga_1}{2k_1^2 r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} (1+4r+2rn) + \frac{4r^2}{(1+r)^2} \right] + \frac{4gra_2}{k_1 k_2 (1+r)^2} + \\
&\quad + \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} - \frac{4r}{(1+r)^2} \right] \left[\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1} \right]; \\
F'_1 \left(\begin{matrix} -3a_1 - \frac{2a_2 k_1}{k_2} \\ (2n+3)a_1 \end{matrix} \right) &= -\frac{ga_1}{2k_1^2 r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} (1+4r+2rn) + \frac{4r^2}{(1+r)^2} \right] - \\
&\quad - \frac{4gra_2}{k_1 k_2 (1+r)^2} + \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} - \frac{4r}{(1+r)^2} \right] \left[\frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1} \right]; \\
f'_2 \left(\begin{matrix} a_1 + 4a_2 + \frac{2a_1 k_2}{k_1} \\ a_1 + 2a_2 + 2(n+1)\frac{a_1 k_2}{k_1} \end{matrix} \right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2 r(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} (1+3r+2rn) \right] - \\
&\quad - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \left[\frac{g(x-a_1-2a_2)}{k_2^2(1+r)} + \frac{V}{k_2(1+r)} \right] + \frac{1-r}{1+r} \left[\frac{g(a_1+4a_2-x)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} \right]; \\
F'_2 \left(\begin{matrix} a_1 - 2a_2 - \frac{2a_1 k_2}{k_1} \\ a_1 - 2(n+1)\frac{a_1 k_2}{k_1} \end{matrix} \right) &= -\frac{ga_1}{k_1 k_2 r(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} (1+3r+2rn) \right] - \\
&\quad - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \left[\frac{g(a_1-x)}{k_2^2(1+r)} + \frac{V}{k_2(1+r)} \right] + \frac{1-r}{1+r} \left[\frac{g(x-a_1+2a_2)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} \right]; \\
f'_1 \left(\begin{matrix} (2n+5)a_1 \\ 3a_1 + \frac{2a_2 k_1}{k_2} \end{matrix} \right) &= \frac{ga_1}{2k_1^2 r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} (1+4r+2rn) + \frac{16r^2(1-2r)}{(1+r)^3} \right] - \\
&\quad + \frac{8gra_2}{k_1 k_2 (1+r)^2} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) + \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} - \frac{8r}{(1+r)^2} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) \right] \left[\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1} \right];
\end{aligned}$$

Af diagrammet [pl. 1] följer: Om $r > 1$ och $V > 2gt_1 \frac{(r+1)}{r-1}$, skiljas stafvarne åt redan vid tiden $2\tau_1$. Största spänningen hos den fria stafven är då i punkten $x = a_1$ vid tiden $2\tau_1$, och $(j_1)_{\max.} = \frac{2gra_1}{k_1^2(1+r)} + \frac{Vr}{k_1(1+r)} = \varepsilon_{11} \cdot \frac{r}{1+r}(2+c)$; Hos den andra är maximalspänningen i punkten $x = a_1 + a_2$ vid tiden $2\tau_1 + \tau_2$, och $(j_2)_{\max.} = \frac{4ga_1}{k_1k_2(1+r)} + \frac{2V}{k_2(1+r)} = \varepsilon_{12} \cdot \frac{2r}{1+r}(2+c)$; Om stafvarne ej skiljas åt mellan tiden $2\tau_1$ och $4\tau_1$, skiljas de ej före $2\tau_2$. Ty mellan $2n'\tau_1$ och $2(n'+1)\tau_1$ är

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1} = \frac{ga_1}{2k_1^2r} \left[-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'+1} (1+r+2rn') + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} (1+r+2rn') - 2r \right] + \\ + \frac{V+gt}{2k_1} \left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'+1} - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} \right];$$

Ar nu $r < 1$, är detta uttryck alltid negativt likaså, om $r > 1$ och n' jemnt. Men om $r > 1$ och n' udda, har det sitt största värde vid tiden $4\tau_1$. I sjelfva verket skiljas de ej åt före tiden $2\tau_1 + 2\tau_2$. Ty mellan tiden $2\tau_2$ och $2(n+1)\tau_1$ är $\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1} = \frac{ga_1}{2k_1^2r} \left[-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+1} (1+r+2rn) + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n (1+r+2rn) - 2r \right] + \\ + \frac{4gra_2}{k_1k_2(1+r)^2} + \frac{V+gt}{2k_1} \left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n - \frac{4r}{(1+r)^2} \right]$; Detta uttryck är också negativt, då $r < 1$, äfvensom då $r > 1$ och n jemnt, och då $r > 1$ och n är udda, är det mindre än $\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1}$ för $n' = 1$ och $t = 4\tau_1$.

Mellan $2(n+1)\tau_1$ och $2\tau_1 + 2\tau_2$ är

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1} = \frac{ga_1}{2k_1^2r} \left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+2} (1+3r+2rn) + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+1} (1+3r+2rn) - 2r \right] + \\ + \frac{4gra_2}{k_1k_2(1+r)^2} + \frac{V+gt}{2k_1} \left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+1} - \frac{4r}{(1+r)^2} \right];$$

En jemförelse med föregående värde på $\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1}$ visar, att detta är negativt, då $r < 1$, samt då $r > 1$ och n udda, och mindre än $\left(\frac{du_1}{dx}\right)_{x=a_1}$ för $n' = 1$ och $t = 4\tau_1$.

Om stafvarne ej skiljas åt vid tiden $2\tau_1$, kunna de göra det vid tiden $2\tau_1 + 2\tau_2$. Vilket härför är:

$$g\tau_1 \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} (1+r+2rn) - \frac{4r}{1+r} - 1 - r \right] + 2g\tau_2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} + Vr \left[\frac{2(3r-1)}{(1+r)^2} - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] > 0;$$

Huru stora äro då maximalspänningarna? Svaret är detta:

A) Om $r > 1$, är $(j_1)_{\max.}$ liksom förut, såvida ej

$$\begin{aligned} \text{a) } n \text{ är jemnt och } g\tau_1 \left[\frac{1-r}{1+r} - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} + \frac{4r(n+1)}{(1+r)^2} \right] - \frac{4g\tau_2}{(1+r)^2} + \\ + 1 + \frac{Vr}{1+r} \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n + \frac{1-r}{1+r} \right] > 0, \text{ ty då är } (j_1)_{\max.} \text{ i punkten } x = a_1 \\ \text{vid tiden } 2(n+1)\tau_1 \text{ och är } = \frac{ga_1}{k_1^2} \left[- \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} + 1 + \frac{4r(n+1)}{(1+r)^2} \right] - \\ - \frac{4ga_2}{k_1k_2(1+r)^2} + \frac{Vr}{k_1(1+r)} \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n + \frac{2}{1+r} \right] = \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } n \text{ udda och } g\tau_1 \left[1-r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} (1+r+2rn) + \frac{4r}{1+r} \right] + \\ + 2g\tau_2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} + Vr \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} + \frac{1-r}{1+r} \right] > 0; \text{ ty då är } (j_1)_{\max.} \\ \text{i punkten } x = a_1 \text{ vid tiden } 2\tau_1 + 2\tau_2 \text{ och är} = \\ = \frac{ga_1}{k_1^2} \left[- \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \frac{(1+r+2rn)}{1+r} + 1 + \frac{4r}{(1+r)^2} \right] + \\ + \frac{2ga_2}{k_1k_2(1+r)} \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} + \frac{Vr}{k_1(1+r)} \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} + \frac{2}{1+r} \right] = \beta; \end{aligned}$$

B) Om $r < 1$, är $(j_1)_{\max.} = \alpha$, så vida $Vr > g(\tau_2 - n\tau_1) \left[1-r + 2 \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^n \right]$;

eljest $= \beta$; $(j_2)_{\max.}$ deremot är $= \varepsilon_{12} \cdot \frac{2r}{1+r} (2+c)$; vare sig stafvarne skiljas vid tiden $2\tau_1$ eller $2\tau_1 + 2\tau_2$.

Men det är endast under förutsättning att stafvarne skiljas åtminstone vid tiden $2\tau_1 + 2\tau_2$, som man af vidfogade diagram med säkerhet kan sluta till att maximalkompressionen har något af ofvan anförda värden*). Emeller-

*) Det fall, då den stötande stafven betraktas som stål, är utförligt behandladt så väl i finit form af de Saint-Venant och Flamant i Comptes Rendus etc. tome XCVII som i trigonometriska serier af de Saint-Venant i Journal de l'Ecole Polytechnique, Cah. 59.

tid visar en jämförelse med diagrammet för $r = 1$, att stafvarne mycket väl kunna skiljas mellan $2\tau_1 + 2\tau_2$ och $4\tau_1 + 4\tau_2$, men bibehålla sina uttryck för största kompressionerna.

Kap. 6.

$$\tau_1 > \tau_2.$$

Antag, att $n\tau_2 < \tau_1 < (n+1)\tau_2$, der n betecknar ett helt tal!

Af de i föregående kap. anförda formlerna för f'_1 etc. får man:

$$f'_2\left(x = a_1 + 2a_2\right) = -\frac{ga_1}{k_1k_2(1+r)} + \frac{2k_1}{k_2(1+r)}F'_1\left[a_1 - \frac{k_1}{k_2}(x - a_1 - 2a_2)\right] + \\ + \frac{1-r}{1+r}f'_2(x - 2a_2);$$

$$f'_2\left(a_1 + 4a_2\right) = -\frac{g(x - a_1)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} + \frac{2ga_2}{k_2^2(1+r)};$$

$$f''_2\left(a_1 + 6a_2\right) = -\frac{g(x - a_1)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} + \frac{2ga_2}{k_2^2(1+r)} + \frac{1-r}{1+r}\left[-\frac{g(x - a_1)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} + \frac{2 \cdot 2ga_2}{k_2^2(1+r)}\right];$$

och, om n' betecknar ett helt tal $< n$,

$$f'_2\left(a_1 + 2(n' + 1)a_2\right) = -\frac{g(x - a_1)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} + \frac{2ga_2}{k_2^2(1+r)} + \frac{1-r}{1+r}\left[-\frac{g(x - a_1)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} + \frac{2 \cdot 2ga_2}{k_2^2(1+r)}\right] + \\ + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\left[-\frac{g(x - a_1)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} + \frac{3 \cdot 2ga_2}{k_2^2(1+r)} + \dots + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'-1}\left[-\frac{g(x - a_1)}{k_2^2(1+r)} - \frac{V}{k_2(1+r)} + \frac{n' \cdot 2ga_2}{k_2^2(1+r)}\right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{g(x - a_1)}{k_2^2(1+r)} + \frac{V}{k_2(1+r)}\right]\left[1 + \frac{1-r}{1+r} + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'-1}\right] + \frac{2ga_2}{k_2^2(1+r)}\left[1 + 2\left(\frac{1-r}{1+r}\right) + 3\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 + \dots + \right.\right.$$

$$+ n' \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'-1} \Big] = \frac{1}{2r} \left[\frac{g(x-a_1)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \right] \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} - 1 \right] + \frac{2ga_2}{k_2^2(1+r)} \cdot$$

$$\frac{n' \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'-1} - (n'+1) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} - 1}{\left(\frac{1-r}{1+r} - 1 \right)^2};$$

$$f'_2 \left(\frac{a_1 + 2(n'+1)a_2}{a_1 + 2n'a_2} \right) = \frac{1}{2r} \left[\frac{g(x-a_1)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \right] \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{ga_2}{2k_2^2 r^2} \left[1+r - (1+r+2rn') \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} \right];$$

$$F'_2 \left(\frac{a_1 - 2n'a_2}{a_1 - 2(n'-1)a_2} \right) = \frac{1}{2r} \left[\frac{g(a_1-x)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \right] \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{ga_2}{2k_2^2 r^2} \left[1-r - (1-r+2rn') \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} \right];$$

$$\text{Af: } f'_1 \left(x = \frac{x}{a_1} \right) = -F'_1(-x) = \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} - \frac{1-r}{1+r} \cdot F'_1(2a_1-x) + \frac{2rk_2}{k_1(1+r)} \cdot$$

$$\cdot f'_2 \left[a_1 + \frac{k_2}{k_1} (x-a_1) \right]; \text{ f\"as:}$$

$$f'_1 \left(\frac{a_1 + 2(n'+1)\frac{a_2}{k_2}k_1}{a_1 + 2n'\frac{a_2}{k_2}k_1} \right) = \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} - \frac{1-r}{1+r} \left[\frac{g(2a_1-x)}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1} \right] +$$

$$+ \frac{2rk_2}{k_1(1+r)} \left[\frac{1}{2r} \left\{ \frac{g(x-a_1)}{k_1 k_2} + \frac{V}{k_2} \right\} \left\{ \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} - 1 \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{ga_2}{2k_2^2 r^2} \left\{ 1+r - (1+r+2rn') \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} \right\} \right];$$

$$f'_1 \left(\frac{a_1 + 2(n'+1)\frac{a_2}{k_2}k_1}{a_1 + 2n'\frac{a_2}{k_2}k_1} \right) = \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} \right] + \frac{1}{1+r} \left[\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1} \right] \left[2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} - \right.$$

$$\left. - 1 - r \right] + \frac{ga_2}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1+r - (1+r+2rn') \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} \right];$$

$$F'_1 \left(\frac{-a_1 - 2(n'+1)\frac{a_2}{k_2}k_1}{-a_1 - 2n'\frac{a_2}{k_2}k_1} \right) = -\frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} \right] + \frac{1}{1+r} \left[\frac{gx}{2k_1^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{V}{2k_1} \right] \left[2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} - 1 - r \right] - \frac{ga_2}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1+r - (1+r+2rn') \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n'} \right];$$

$$f'_1 \left(\begin{matrix} 3a_1 \\ a_1 + 2n \frac{a_2}{k_2} k_1 \end{matrix} \right) = \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right] + \frac{1}{1+r} \left[\frac{gx}{2k_1^2} + \frac{V}{2k_1} \right] \left[2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n - 1 - r \right] +$$

$$+ \frac{ga_2}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1+r - (1+r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right];$$

$$F'_2 \left(\begin{matrix} -3a_1 \\ -a_1 - 2n \frac{a_2}{k_2} k_1 \end{matrix} \right) = -\frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right] + \frac{1}{1+r} \left[\frac{gx}{2k_1^2} - \frac{V}{2k_1} \right] \left[2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n - \right.$$

$$\left. -1 - r \right] - \frac{ga_2}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1+r - (1+r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right];$$

$$f'_2 \left(\begin{matrix} a_1 + 2a_2 + \frac{2a_1}{k_1} k_2 \\ a_1 + 2(n+1)a_2 \end{matrix} \right) = \frac{1}{2r} \left[\frac{g(x-a_1)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \right] \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{ga_2}{2k_2^2 r^2} \left[1+r - (1+3r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right];$$

$$F'_2 \left(\begin{matrix} a_1 - \frac{2a_1}{k_1} k_2 \\ a_1 - 2na_2 \end{matrix} \right) = \frac{1}{2r} \left[\frac{g(a_1-x)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \right] \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{ga_2}{2k_2^2 r^2} \left[1-r - (1+r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right];$$

$$f'_1 \left(\begin{matrix} a_1 + 2(n+1) \frac{a_2}{k_2} k_1 \\ 3a_1 \end{matrix} \right) = \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} \left[1 + \frac{2r(2-r)}{1+r} - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right] + \frac{1}{1+r} \left[\frac{gx}{k_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{V}{2k_1} \right] \left[\frac{(1-r)^2}{1+r} + 2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n - 2 \right] + \frac{ga_2}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1+r - (1+r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right];$$

$$F'_1 \left(\begin{matrix} -a_1 - 2(n+1) \frac{a_2}{k_2} k_1 \\ -3a_1 \end{matrix} \right) = -\frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} \left[1 + \frac{2r(2-r)}{1+r} - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right] + \frac{1}{1+r} \left[\frac{gx}{2k_1^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{V}{2k_1} \right] \left[\frac{(1-r)^2}{1+r} + 2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n - 2 \right] - \frac{ga_2}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1+r - (1+r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right];$$

$$f'_2 \left(\begin{matrix} a_1 + 2(n+2) \frac{a_2}{k_2} k_1 \\ a_1 + 2a_2 + \frac{2a_1}{k_1} k_2 \end{matrix} \right) = -\frac{4gra_1}{k k_2 (1+r)^2} + \frac{1}{2r} \left[\frac{g(x-a_1-2a_2)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \right] \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3r^2-2r-1}{(1+r)^2} \right] + \frac{ga_2}{2k_2^2 r^2} \left[1-r - (1+r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right];$$

$$F'_2 \left(\begin{matrix} a_1 - 2(n+1)a_2 \\ a_1 - \frac{2a_1}{k_1}k_2 \end{matrix} \right) = -\frac{4gra_1}{k_1k_2(1+r)^2} + \frac{1}{2r} \left[\frac{g(a_1-x)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} + \frac{3r^2-2r-1}{(1+r)^2} \right] \right] +$$

$$+ \frac{ga_2}{2k_2^2r^2} \left[1-r-(1+r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right];$$

$$f'_1 \left(\begin{matrix} 3a_1 + \frac{2a_2}{k_2}k_1 \\ a_1 + 2(n+1)\frac{a_2}{k_2}k_1 \end{matrix} \right) = \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} \left[1 + \frac{2r(2-r)}{1+r} - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] + \frac{1}{1+r} \left[\frac{gx}{2k_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{V}{2k_1} \left[\frac{(1-r)^2}{1+r} + 2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} - 2 \right] + \frac{ga_2}{k_1k_2r(1+r)} \left[1+r-(1+3r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] \right];$$

$$F'_1 \left(\begin{matrix} -3a_1 - \frac{2a_2}{k_2}k_1 \\ -a_1 - 2(n+1)\frac{a_2}{k_2}k_1 \end{matrix} \right) = -\frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} \left[1 + \frac{2r(2-r)}{1+r} - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] + \frac{1}{1+r} \left[\frac{gx}{2k_1^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{V}{2k_1} \left[\frac{(1-r)^2}{1+r} + 2 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} - 2 \right] - \frac{ga_2}{k_1k_2r(1+r)} \left[1+r-(1+3r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] \right];$$

$$f'_2 \left(\begin{matrix} a_1 + 4a_2 + \frac{2a_1}{k_1}k_2 \\ a_1 + 2(n+2)a_2 \end{matrix} \right) = -\frac{4gra_1}{k_1k_2(1+r)^2} + \frac{1}{2r} \left[\frac{g(x-a_1-2a_2)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{3r^2-2r-1}{(1+r)^2} \right] + \frac{ga_2}{2k_2^2r^2} \left[1-r-(1+3r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} \right];$$

$$F'_2 \left(\begin{matrix} a_1 - \frac{2a_1}{k_1}k_2 & 2a_2 \\ a_1 - 2(n+1)a_2 \end{matrix} \right) = -\frac{4gra_1}{k_1k_2(1+r)^2} + \frac{1}{2r} \left[\frac{g(a_1-x)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} + \frac{3r^2-2r-1}{(1+r)^2} \right] \right] +$$

$$+ \frac{ga_2}{2k_2^2r^2} \left[1-r-(1+3r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} \right];$$

$$F'_2 \left(\begin{matrix} a_1 - 2(n+2)a_2 \\ a_1 - \frac{2a_1}{k_1}k_2 - 2a_2 \end{matrix} \right) = -\frac{4ga_1}{k_1k_2(1+r)} + \frac{1}{2r} \left[\frac{g(a_1-x)}{k_2^2} + \frac{V}{k_2} \left[\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} + \frac{3r-1}{1+r} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{4r(1-r)^2}{(1+r)^3} \right] + \frac{ga_2}{2k_2^2r^2} \left[\frac{(1-r)^2}{1+r} - 2r + \frac{4r(1-r)}{(1+r)^2} + \frac{8r^2(1-r)^2}{(1+r)^3} - \right.$$

$$\left. - (1+3r+2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+2} \right];$$

Af diagrammet (pl. 2.) följer: Stafvarne kunna ej skiljas åt före tiden $2\tau_1$. Ty mellan tiden $2n'\tau_2$ och $2(n'+1)\tau_2$ är

$$\left(\frac{dv_1}{dx}\right)_{x=a_1} = \left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} - 1 - r\right] \frac{V+gt}{k_1(1+r)} + \frac{ga_2}{k_1k_2r(1+r)} \left[1+r-(1+r+2rn')\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'}\right];$$

och detta värde är alltid negativt. Men vid tiden $2\tau_1$ kunna de göra det. Vilket är:

$$V \left[\frac{r^2-2r-1}{1+r} + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n \right] > \frac{4gr^2\tau_1}{1+r} - \frac{g\tau_2}{r} \left[1+r + \frac{2r(n+1)(r^2-2r-1)}{1+r} - (1-r)\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n \right];$$

Här måste $\frac{r^2-2r-1}{1+r} + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n > 0$, r följaktligen > 1 ; Hvilka äro i detta fall de största värdena på j_1 och j_2 ? Mellan $2n'\tau_2$ och $2(n'+1)\tau_2$ är största värdet på

$$j_1 = \frac{V}{k_1(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} \right] + \frac{ga_2}{k_1k_2r} \left[-1+2r+2rn' + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'+1} \right];$$

Detta uttryck växer med n' , om n' är jemnt. Om n' är udda, växer det, om på samma gång $V < \frac{g\tau_2}{r} \left[1-r + (1+r)^3 \left(\frac{r+1}{r-1}\right)^{n'-2} \right]$, annars sjunker det.

Man har sålunda att söka största kompressionen hos den fria stafven i punkten $x=a_1$ vid tiden $4\tau_2$, $2(n-1)\tau_2$, $2n\tau_2$ eller $2\tau_1$, och den har något af 4 följande värden:

$$\begin{aligned} & \frac{r(r+3)V}{k_1(1+r)^2} + \frac{4gra_2(r+2)}{k_1k_2(1+r)^2}; \\ & \frac{V}{k_1(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n-2} \right] + \frac{ga_2}{k_1k_2r} \left[-1-2r+2rn + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n-2} \right]; \\ & \frac{V}{k_1(1+r)} \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n-1} \right] + \frac{ga_2}{k_1k_2r} \left[-1+2rn + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n-1} \right]; \\ & \left[\frac{2ga_1}{k_1^2(1+r)} + \frac{V}{k_1(1+r)} \right] \left[1+r - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n \right] + \frac{ga_2}{k_1k_2r(1+r)} \left[-1-r+(1+r+2rn)\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n \right]; \end{aligned}$$

Mellan tiden $(2n'-1)\tau_2$ och $(2n'+1)\tau_2$ är för $x=a_1+a_2$

$$j_2 = \frac{V+gt}{rk_2} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} \right] + \frac{ga_2}{k_2^2r^2} \left[-1+(1+2rn')\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} \right]; \text{ och största värdet är}$$

$$j_2 = \frac{V}{k_2r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} \right] + \frac{ga_2}{k_2^2r^2} \left[-1+r+2rn' + (1-r)\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n'} \right]. \quad \text{Detta värde}$$

växer med n' , om n' är jemnt, äfvensom då n' är udda och $V < \frac{g\tau_2(r-1)}{r}$.

$\cdot \left[(1+r) \left(\frac{r+1}{r-1} \right)^{n'-1} - 1 \right]$; Häraf följer att största kompressionen är vid tiden $3\tau_2$, $(2n-1)\tau_2$, $(2n+1)\tau_2$ eller $2\tau_1 + \tau_2$. Den har då något af följande värden:

$$\begin{aligned} & \frac{2V}{k_2(1+r)} + \frac{4ga_2}{k_2^2(1+r)}; \\ & \frac{V}{k_2r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n-1} \right] + \frac{ga_2}{k_2^2r^2} \left[-1 - r + 2rn + (1-r) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n-1} \right]; \\ & \frac{V}{k_2r} \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right] + \frac{ga_2}{k_2^2r^2} \left[-1 + r + 2rn + (1-r) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^n \right]; \\ & \left[\frac{2ga_1}{k_1k_2r} + \frac{V}{k_2r} \right] \left[1 - \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] + \frac{ga_2}{k_2^2r^2} \left[-1 + r + (1+r + 2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right]; \end{aligned}$$

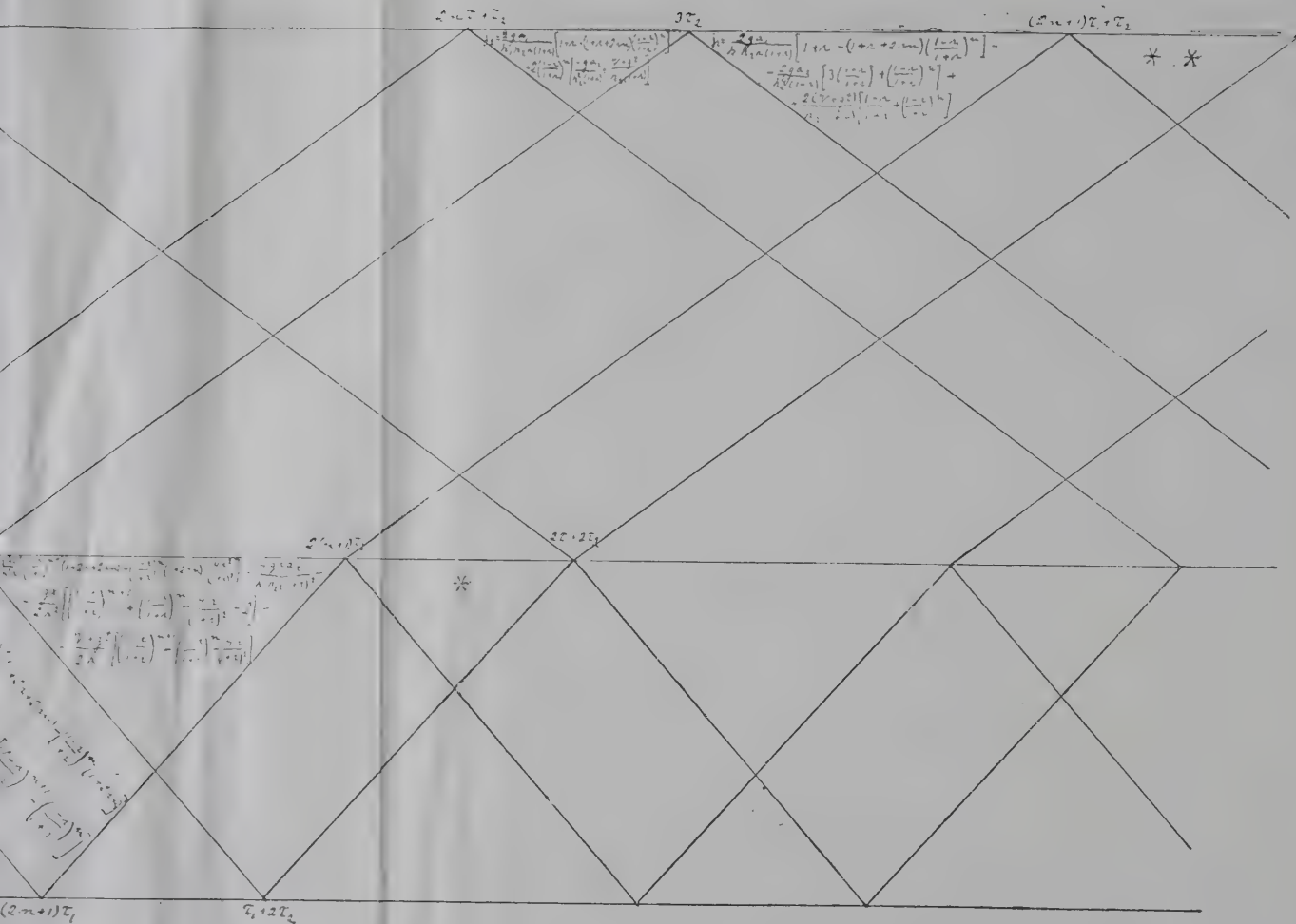
Stafvarne kunna äfven skiljas åt mellan tiden $2(n+1)\tau_2$ och $2\tau_1 + 2\tau_2$, men hvarken j_1 eller j_2 blir då större än förut. Ej heller bli de det, om stafvarne skiljas omedelbart efter $2\tau_1 + 2\tau_2$.

Vilkoret för detta senare är:

$$\begin{aligned} & Vr \left[\frac{r^3 + 7r^2 - 3r - 1}{(1+r)^2} + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] + 2rg\tau_1 \left[-\frac{3r^3 - r^2 + 5r + 1}{(1+r)^2} + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] + \\ & + g\tau_2 \left[\frac{(1-r)^2(2r+1)}{1+r} - (1+r + 2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] > 0; \end{aligned}$$

Här måste $\frac{r^3 + 7r^2 - 3r - 1}{(1+r)^2} + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1}$ vara > 0 ; r får sålunda aldrig understiga $\sqrt{21} - 4$, om man vill vara säker på, att något af ofvan angifna värden på j skall vara det största.





$$n+2 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+1} - \frac{4r}{(1+r)^2} - 2] + \frac{V+gt}{2h_1} \left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+1} - \frac{4r}{(1+r)^2} \right];$$

$$- \frac{r}{1+r} + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{n+1}];$$

$$X_2 = a_1 + a_2$$

$$j_2 = 0$$

$$n_2 = \sigma_1$$

$$j_2 = \frac{2g(h_2 t - a_2)}{h_2^2(1+r)} + \frac{2V}{h_2(1+r)}$$

$$X_1 = a_1$$

$$j_1 = -\frac{2g(a_1 - x - h_1 t)}{h_1^2(1+r)} + \frac{2V}{h_1(1+r)}$$

$$j_1 = 0$$

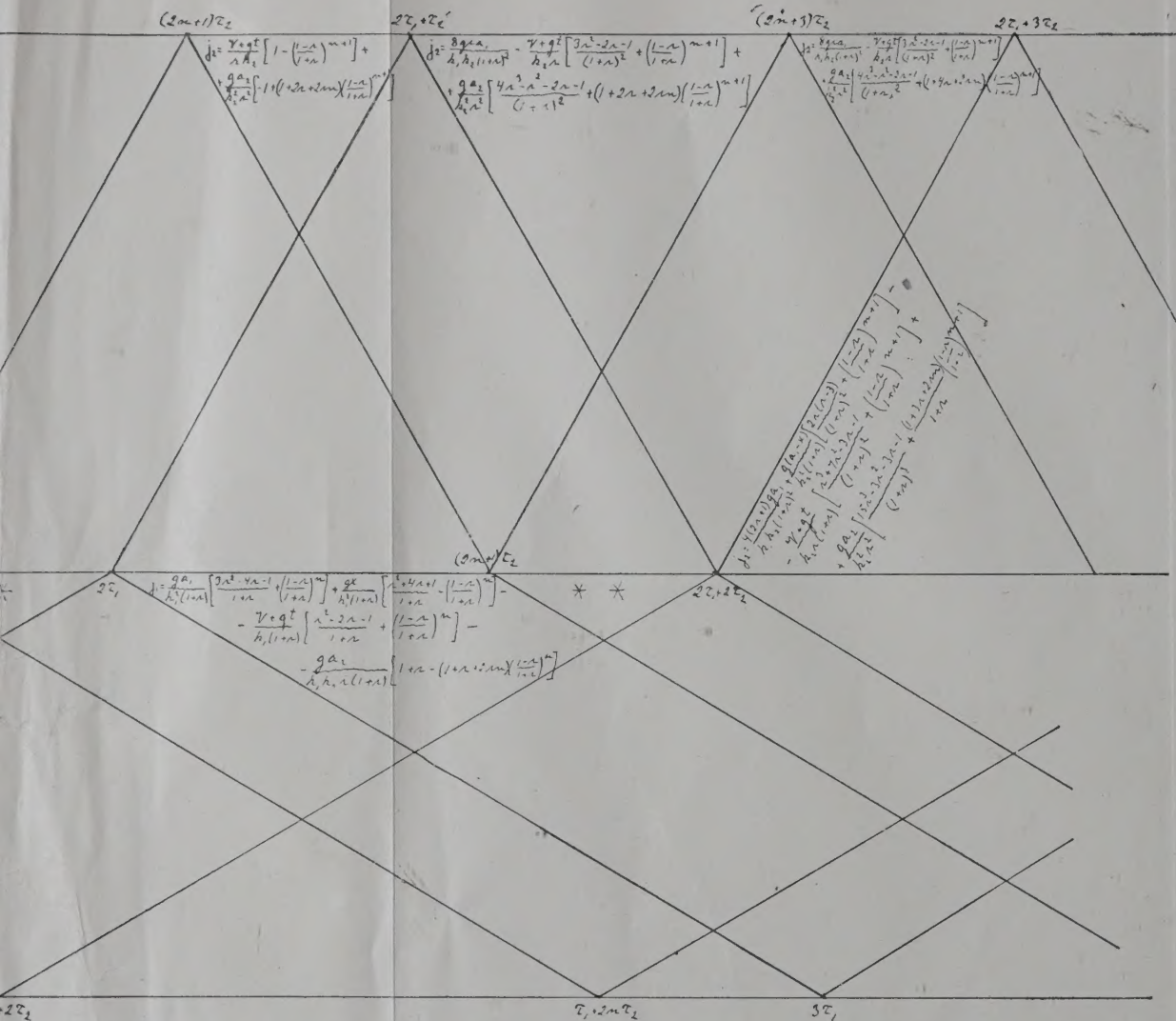
$$n_1 = \psi + g^t$$

$$X = 0$$

$$j_1 = \frac{2g^t}{h_1^2(1+r)}$$

$$* j_1 = \left[1 + r - \frac{(1-r)^n}{(1+r)} \right] \left[\frac{g(x - a_1 + k_1 t)}{k_1^2(1+r)} + \frac{V}{k_1(1+r)} \right] - \frac{ga_2}{k_1 k_2 r(1+r)} \left[1 + r - (1+r + 2rn) \frac{1}{1+r} \right]$$

$$** j_1 = \frac{ga_1}{k_1^2(1+r)} \left[\frac{3r^2 - 4r - 1}{1+r} + \frac{(1-r)^{n+1}}{(1+r)} \right] + \frac{gx}{k_1^2(1+r)} \left[\frac{r^2 + 4r + 1}{1+r} - \frac{(1-r)^{n+1}}{(1+r)} \right] - \frac{V}{k_1(1+r)}$$



$$\left[\frac{r^n}{r} \right];$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 - 2r - 1}{1+r} + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right] - \frac{g a_2}{k_1 k_2 r (1+r)} \left[1 + r - (1 + 3r + 2rn) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{n+1} \right];$$

